Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotische Ordinal- und Kardinalzahlarithmetik

1. So wie der n-ten finiten Kardinalzahl in $\mathbb{N}$ die n-te Ordinalzahl entspricht, z.B.

$0 = 0.$

$1 = 1.$

$2 = 2.$,

usw., entspricht der n-ten transfiniten Kardinalzahl die n-te Ordinalzahl (vgl. Suppes 1972, S. 228):

$\aleph_0 = \omega.$

2. Zur grundlegenden Theorie der transfiniten Ordinalzahlen empfiehlt sich immer noch der entsprechende Passus in Hausdorff (1914, S. 111):

Wir schließen diesen Paragraphen mit einer Darstellung des Anfangs der Zahlenreihe, d. h. der Menge $W(\alpha)$ für hinlänglich großes α. Zunächst kommen die endlichen Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots$$

Auf diese folgt, als Typus der Menge dieser Zahlen, die Zahl ω, der dann $\omega + 1$, $\omega + 2$ usw. folgen, also

$$\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots$$

Auf diese Zahlen folgt, als Typus der Menge

$$\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\},$$

die aus zwei Folgen besteht, die Zahl $\omega + \omega = \omega 2$ und demnach

$$\omega 2,\ \omega 2 + 1,\ \omega 2 + 2, \ldots$$

Auf diese wieder folgt, als Typus einer aus drei Folgen bestehenden Menge, die Zahl $\omega 3$, also

$$\omega 3,\ \omega 3 + 1,\ \omega 3 + 2, \ldots \text{ usw.}$$

Die Menge aller dieser Folgen, eine Folge von Folgen, hat den Typus

$$\omega + \omega + \omega + \ldots = \omega\omega = \omega^2,$$

und dies ist die erste auf alle Zahlen $\omega\nu_1 + \nu_0$ (ν_0, ν_1 endlich) folgende Zahl, aber auch die erste auf alle Zahlen $\omega\nu$ folgende Zahl.

3. Während allerdings für die transfiniten Kardinalzahlen die Addition und die Multiplikation kommutativ sind:

a) $\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0$

b) $\aleph_0 \cdot n = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$,

sind die beiden Operation nicht kommutativ für die transfiniten Ordinalzahlen (aus dem Wikipedia-Artikel „Transfinite Arithmetik"):

Die Menge $3 + \omega$ sieht so aus:

$$\mathrm{ord}(\{0 < 1 < 2 < 0_{(0)} < 1_{(0)} < 2_{(0)} < 3_{(0)} < \ldots\}) = \omega$$

Wir haben also $3 + \omega = \omega$. Dagegen ist

$$\omega + 3 = \mathrm{ord}(\{0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < 0_{(0)} < 1_{(0)} < 2_{(0)}\})$$

Die Ordinalzahl $\omega \cdot 2$ sieht so aus:

$$\{0_{(0)} < 1_{(0)} < 2_{(0)} < \ldots < 0_{(1)} < 1_{(1)} < 2_{(1)} < \ldots\}$$

Man erkennt, dass $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$ ist. Dagegen sieht $2 \cdot \omega$ so aus:

$$\{0_{(0)} < 1_{(0)} < 0_{(1)} < 1_{(1)} < 0_{(2)} < 1_{(2)} < \ldots\}$$

4. Sei nun ω ein beliebiges Objekt, das zum Zeichen erklärt werden kann (vgl. Bense 1967, S. 9) und ZR eine Zeichenklasse, welche das zum Zeichen erklärte Objekt ω sowie die zu ω affinen Objekte (vgl. Bense 1983, S. 45) enthält, d.h.

$ZR \subseteq \{\omega\}$.

Dann entspricht jedes Objekt $\omega_1, \omega_2, \omega_2, \ldots, \omega_n$ einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und die $\mathbb{N}$ selbst einer ZR. (Die Semiotik bestünde somit aus 10 zueinander nicht-isomorphen semiotischen Äquivalenten zu $\mathbb{N}$; vgl. Toth 2011.)

Wir fragen somit nach der Kommutativität der Addition und Multiplikation von Objekt und Zeichenklasse:

a) $\omega + ZR = ZR + \omega$

b) $\omega \cdot ZR = ZR \cdot \omega$

Nehmen wir als Beispiel für a) zuerst einen Holzpfahl und als Beispiel für b) eine Wegweisung (mit Orts- und Richtungsangaben, d.h. ein „vollwertiges" Zeichen). Gilt die Kommutativität der Addition von Objekt und Zeichen NICHT, d.h. ist das Resultat der „Addition" verschieden für den Fall, dass wir einem Objekt ein Zeichen „addieren" und einem Zeichen ein Objekt addieren", dann verhält sich der semiotische Fall a) genauso wie weiter oben der ordinal-transfinite Fall a). „Addieren" wir also dem Objekt Pfahl das Zeichen Wegweisung, so kommt ein Wegweiser heraus, wie wir ihn von Wanderungen über Land kennen. Auch wenn hier scheinbar die Reihenfolge der Addition der Summanden unerheblich zu sein scheint, scheint dies für die Semiotik dennoch nicht zuzutreffen, denn setzen wir nun für das Objekt ein Produkt und für das Zeichen eine Marke, so bekommen wir ein Markenprodukt. Während aber beim Wegweiser das Zeichen stärker ins Gewicht fällt, fällt beim Markenprodukt das Objekt stärker ins Gewicht. Wir begründen das wie folgt: Entfernt man das Zeichen, d.h. die Wegweisung, so bleibt vom Wegweiser nur ein Pfahl übrig, der rein gar nichts mehr bedeutet. Entfernt man jedoch das Objekt, so bleibt immerhin von der Wegweisung die Entfernungsangabe korrekt, auch wenn der Pfeil, auf dem Boden liegend, möglicherweise in die falsche Richtung weist. Das Zeichen ist hier also primär und das Objekt sekundär, und wir wollen diesen Fall daher ein „Zeichenobjekt" nennen:

$ZO = ZR > \omega$.

Genau umgekehrt ist es jedoch beim Markenprodukt: Entfernen wir hier das Objekt, so bleibt zwar die Banderole übrig, aber sonst nichts. Entfernen wir hingegen eine Marke – z.B. einen Mercedesstern, die Banderole „Davidoff" oder die Etikette „Château Mouton-Rothschild", so dürfte kein Zweifel bestehen, dass die zurückbleibenden Objekte immer noch ein Mercedes (und kein Deux-Chevaux), eine Davidoff (und kein Rössli-Stumpen, d.h. eine Knaster-Zigarre) und immer noch der Spitzenwein der allerhöchsten Klasse (und kein aufgesüsster Fusel) ist. In anderen Worten: In diesem Fall ist klar das Objekt und nicht die Marke, d.h. das Zeichen, primär. Da hier der zum vorigen duale Fall vorliegt, sprechen wir hier von „Objektzeichen" und formulieren es wie folgt:

$OZ = \omega > ZR$.

Auch wenn es also nicht gelingt, ein Beispiel mit dem selben Objekt und dem selben Zeichen zu finden, geht aus der Differenz von ZO und OZ also klar hervor:

a) $\omega + ZR \neq ZR + \omega$.

Was nun die Multiplikation angeht, so gibt es sie (wie ich in früheren Arbeiten mehrfach angedeutet hatte) keine semiotische Multiplikation im eigentlichen Sinne. Man kann sie jedoch nach dem Vorbild von

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + ... + n}_{\text{m-mal}} = m \cdot n$$

auf die Additionen zurückführen. Da für diese die Kommutativität der Zeichen nicht gilt, folgt, dass sie auch für die Zeichen nicht gilt, d.h. wir bekommen

b) $\omega \cdot ZR \neq ZR \cdot \omega$. q.e.d.

5. Wir kommen unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Toth (2011) und der daselbst angegebenen Literatur sowie unserer hier errungenen Ergebnisse zu folgendem Schluss, den wir als semiotisches Theorem formulieren können:

Theorem: Zeichen als Elemente von Zeichenklassen sowie Zeichenklassen als Mengen genügend der transfiniten Kardinalzahlarithmetik. (Zu Zeichen erklärbare) Objekte als Elemente und ihre Zeichenklassen als Mengen genügen hingegen der transfiniten Ordinalzahlarithmetik.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Hausdorff, Felix, Grundzüge der Mengenlehre. Berlin 1914

Suppes, Patrick, Axiomatic Set Theory. New York 1960, Dover 1972

Toth, Alfred, Über die Transfinitheit von Zeichen und von Zeichenklassen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

2.5.2011